



TITLE:

# Putnam の不等式の拡張について (作用素の構造に関する作用素論の 最近の話題)

AUTHOR(S):

長, 宗雄

---

CITATION:

長, 宗雄. Putnam の不等式の拡張について(作用素の構造に関する作用素論の最近の話題). 数理解析研究所講究録 1997, 979: 124-127

ISSUE DATE:

1997-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60846>

RIGHT:

## Putnam の不等式の拡張について

神奈川大学 長 宗雄 (Muneo Chō)

complex Hilbert space  $\mathcal{H}$  上の hyponormal 作用素  $T$  に対する Putnam の不等式

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \frac{1}{\pi} m_2(\sigma(T))$$

(ここで  $m_2$  は planar Lebesgue measure である) は現在のところ次のような拡張がある.

1.  $p$ -hyponormal 作用素への拡張.

作用素  $T$  :  $p$ -hyponormal if  $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ .

特に  $p = \frac{1}{2}$  のとき  $T$  を semi-hyponormal と呼ぶ.

この作用素については次の不等式が成り立つ.

$$\|(T^*T)^p - (TT^*)^p\| \leq \frac{p}{\pi} \int \int_{\sigma(T)} r^{2p-1} dr d\theta$$

$p \geq \frac{1}{2}$  のときは D. Xia [10] で示されている.

$0 < p < \frac{1}{2}$  のときは M. Chō and M. Itoh [1] で示された.

2. 中路先生による拡張. 中路先生は論文 [6] で次の結果を示した.

$T$ : hyponormal 作用素とし  $K$  は任意の有界線形作用素とし  $TK = KT$  を満たすものとする. このとき

$$\|T^*K - KT^*\| \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{\pi} m_2(\sigma(T))\right)^{\frac{1}{2}} \|K\|$$

3.  $n$ -tuple への拡張.  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$  を可換な作用素としたとき

$$\|\mathbf{T}, \mathbf{T}^* \text{ の式} \| \leq \alpha \cdot \text{meas}(\sigma(\mathbf{T}))$$

のような形の不等式が望ましい, ただし  $\alpha$  は定数で  $\sigma(\mathbf{T})$  は  $\mathbf{T}$  の Taylor spectrum である. D. Xia は [9] で非常に特殊な  $n$ -tuple 即ち  $\mathbf{T} = (U_1A, \dots, U_nA)$ ,  $A \geq 0$ , さらに  $(U_1, \dots, U_n)$  が可換なユニタリー作用素のときに拡張を得ているので, ここではそれについて解説する. 簡単のため  $n = 2$  とする.

$\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  を可換なユニタリ作用素とする. 作用素  $\mathbf{Q}_j$  ( $j = 1, 2$ ) を次のように定義する

$$\mathbf{Q}_j T = T - U_j T U_j^* \quad (T \in B(\mathcal{H})).$$

そこで  $A \in B(\mathcal{H})$  and  $A \geq 0$  に対して.  $(\mathbf{U}, A)$  は次のとき semi-hyponormal と呼ばれる

$$\mathbf{Q}_1 A, \mathbf{Q}_2 A \text{ and } \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 A \geq 0.$$

この定義からすぐに  $(\mathbf{U}, A)$  が semi-hyponormal のとき各作用素  $U_j A$  は semi-hyponormal である. もし

$$S_j^\pm(T) = s - \lim_{n \rightarrow \pm\infty} (U_j^{-n} T U_j^n)$$

が存在するとき  $S_j^\pm(T)$  は the polar symbols of  $T$  と呼ばれる.  $U_j A$  が semi-hyponormal のときは  $S_j^\pm(A)$  は存在する.  $0 \leq k \leq 1$  に対して,

$$(kS_j^+ + (1-k)S_j^-)T = kS_j^+(T) + (1-k)S_j^-(T).$$

とし  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in [0, 1]^2$  と  $(\mathbf{U}, A)$  : semi-hyponormal に対して the generalized polar symbols  $A_{\mathbf{k}}$  of  $A$  は次のように定義する

$$A_{\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^2 (k_j S_j^+ + (1-k_j) S_j^-) A.$$

このとき作用素  $(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}})$  は可換な作用素の 3-tuple になっている. そこで  $(\mathbf{U}, A)$  の spectrum を次のように定義する.

$$\sigma(\mathbf{U}, A) = \bigcup_{\mathbf{k} \in [0, 1]^2} \sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}}).$$

ここで  $\sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}})$  は  $(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}})$  の joint approximate point spectrum である. 即ち  $(z_1, z_2, z_3) \in \sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}})$  if and only if there exists a sequence  $\{x_n\}$  of unit vectors such that

$$(U_1 - z_1)x_n \rightarrow 0, (U_2 - z_2)x_n \rightarrow 0 \text{ and } (A_{\mathbf{k}} - z_3)x_n \rightarrow 0.$$

また,  $m_j$  を normalized Haar measure in  $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ , 即ち

$$dm_j = \frac{1}{2\pi} d\theta_j \quad (e^{i\theta_j} \in \mathbf{T})$$

とし, さらに  $m = m_1 \times m_2 \times dr$  とする. 以上の下で D. Xiaさんは次の拡張を得た.

**Theorem 1** (Th. 5 of [9]). *Let  $(\mathbf{U}, A)$  be semi-hyponormal. Then*

$$\|\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 A\| \leq m(\sigma(\mathbf{U}, A)).$$

これは  $p$ -hyponormal tuples にもすぐに次のように拡張できる. まず  $A \in B(\mathcal{H})$  and  $A \geq 0$  とし.  $(\mathbf{U}, A)$  は次のとき  $p$ -hyponormal と呼ぶ

$$\mathbf{Q}_1 A^{2p}, \mathbf{Q}_2 A^{2p} \text{ and } \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 A^{2p} \geq 0.$$

そして  $(\mathbf{U}, A) : p$ -hyponormal と  $0 \leq k \leq 1$  に対して

$$\{kS_j^+ + (1-k)S_j^-\}A = \{kS_j^+(A^{2p}) + (1-k)S_j^-(A^{2p})\}^{\frac{1}{2p}}$$

とし, さらに  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in [0, 1]^2$ , に対して the generalized polar symbols  $A_{(\mathbf{k})}$  of  $A$  を次のように定義する.

$$A_{(\mathbf{k})} = \prod_{j=1}^2 \{k_j S_j^+ + (1-k_j) S_j^-\} A.$$

そして joint spectrum  $\sigma(\mathbf{U}, A)$  は

$$\sigma(\mathbf{U}, A) = \bigcup_{\mathbf{k} \in [0, 1]^2} \sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_{(\mathbf{k})}).$$

と定義すると, 次の結果を得る.

**Theorem 2.** *Let  $(\mathbf{U}, A)$  be  $p$ -hyponormal. Then*

$$\|\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 A^{2p}\| \leq \frac{2p}{(2\pi)^2} \int \int_{\sigma(\mathbf{U}, A)} r^{2p-1} d\theta_1 d\theta_2 dr.$$

最後に semi-hyponormal 作用素  $T$  が  $T = UA$  と polar 分解され, さらに  $U$  がユニタリ作用素となっているときは  $0 \leq k \leq 1$  に対して

$$A_k = kS_U^+(A) + (1-k)S_U^-(A)$$

とし

$$\sigma(U, A) = \bigcup_{0 \leq k \leq 1} \sigma_{ja}(U, A_k)$$

とするとき

$$re^{i\theta} \in \sigma(T) \iff (e^{i\theta}, r) \in \sigma(U, A)$$

が成り立つ. 従って極座標に変換しただけのことになる. もちろん, この結果は  $p$ -hyponormal 作用素に対しても同様に成立する. 詳しくは [3] の論文を参照下さい.

## References

- [1] M. Chō and M. Itoh, Putnam's inequality for  $p$ -hyponormal operators, Proc. Amer. Math. J. 123(1995), 2435-2440.
- [2] M. Chō and M. Itoh, On spectra of  $p$ -hyponormal operators, Integral Equations and Operator Theory 23(1995), 287-293.
- [3] M. Chō and T. Huruya, Putnam's inequality for  $p$ -hyponormal  $n$ -tuples, preprint.
- [4] R. Curto, On the connectedness of invertible  $n$ -tuples, Indiana Univ. Math. J. 29(1980), 393-406.
- [5] R. Curto, P. Muhly and D. Xia, A trace estimate for  $p$ -hyponormal operators, Integral Equations and Operator Theory 6(1983), 507-514.
- [6] T. Nakazi, Complete spectral area estimates and self-commutators, Michigan Math. J. 35 (1988), 435-441.
- [7] C. R. Putnam, Commutation properties of Hilbert space operators, Springer-Verlag, 1967.
- [8] J. L. Taylor, A joint spectrum for several commuting operators, J. Funct. Anal. 6(1970), 172-191.
- [9] D. Xia, On the semi-hyponormal  $n$ -tuple of operators, Integral Equations and Operator Theory 6(1983), 879-898.
- [10] D. Xia, Spectral Theory of Hyponormal Operators, Birkhäuser 1983.